

Title	Vereinigung ト Durchschnitt ノ公理化ニ就イテ
Author(s)	石橋, 榮
Citation	全国紙上数学談話会. 36 p.10-p.15
Issue Date	1935-04-03
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74034">https://doi.org/10.18910/74034</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 112. Vereinigung と Durchschnitt の 公理化 = 就イテ

石 橋 榮 (関西學院)

集合論 = 於ケル算法、和と積ヲ、元ノ概念ヲ用ヒズニ規定スルトスレバ次ノ如クナルト思フ。即チ和ヲ記号  $+$  デ、積ヲ  $\cdot$  デ示セバ

$$(I) \text{ 結合律 } (A+B)+C=A+(B+C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(II) \text{ 交換律 } A+B=B+A, \quad A \cdot B=B \cdot A$$

$$(III) \text{ 分配律 } (A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad (A \cdot B) + C = (A+C) \cdot (B+C)$$

$$(IV) \text{ 同一律(?) } A+A=A, \quad A \cdot A=A$$

$$(V) \quad A+B=A \cdot B \text{ ナラバ } A=B$$

デアル。

上記ノ五公理ヲ基ニシテ集合論ノ定理ニ平行スルモノヲ少シ出シテミル。先ヅ (IV), (V) カラ

[定理1]  $A+B=A \cdot B$  ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ  $A=B$  デアル。

[定理2]  $A \cdot B=A$  ナラバ  $A+B=B$ , 及ビソノ逆が成立ツ。

$$(証) \quad (A+B)+B=A+(B+B)=A+B$$

$$(A+B) \cdot B = A \cdot B + B \cdot B = A \cdot B + B = A+B \quad (A \cdot B = A \text{ ナル假定ニ由ル})$$

$$\text{故} = (A+B) + B = (A+B) \cdot B \quad \text{從ツテ (V) カラ } A+B=B$$

$$\text{即チ } A \cdot B = A \longrightarrow A+B=B. \quad \text{逆モ之ト平行ニ行ク。}$$

(定義)  $A \cdot B = A$ , 即チ  $A+B=B$  ナルトキ  $A$  ト  $B$  トノ  
關係ヲ記号  $A < B$  ヲ表ハス。

關係  $<$  ハ集合論ヲ取扱フ關係  $\subset$  ノコトデアル。上ノ定義カラ直チニ

[定理3]  $A < B$  且ツ  $B < A$  ナラバ  $A=B$ .

[定理4]  $A < B$  ナラバ  $B < C$  ナラバ  $A < C$ .

(証)  $A < B$  ナカラ  $A \cdot B = A$ , 又  $B < C$  ナカラ  $B \cdot C = B$ .

第二ノ關係ヲ第一ノ關係ニ持込メバ  $A \cdot (B \cdot C) = A$ ,

即チ  $(A \cdot B) \cdot C = A$ . 之レニ第一ノ關係ヲ持込シテ  
 $A \cdot C = A$ . 故ニ  $A < C$ .

[定理5]  $A < B$  且ツ  $A' < B'$  ナラバ  $A+A' < B+B'$  及ビ  
 $A \cdot A' < B \cdot B'$

(証)  $A < B$  ナカラ  $A+B=B$ ,

$$\text{故} = (A+A') + (B+B') = (A+B) + (A'+B') = B+B'$$

故ニ定義カラ

$$A+A' < B+B'. \quad A \cdot A' < B \cdot B' \text{モ同様。}$$

[定理6]  $A \cdot B < A < A+B$ .

(証)  $(A \cdot B) \cdot A = (A \cdot A) \cdot B = A \cdot B$ . 故ニ定義カラ  $A \cdot B < A$ .

$$\text{又 } A + (A+B) = (A+A) + B = A+B. \quad \text{故ニ } A < A+B.$$

(定義)  $A, B, C, \dots$  ノ凡テニ對シテ  $\supset X$  ナル如キ  $X \neq 0$  デ表ハシ、又  $A, B, C, \dots$  ノ凡テニ對シテ  $\subset Y$  ナル如キ  $Y \neq 1$  デ表ハス。

$A, B, C, \dots$  が夫々部分集合ニ相當スルトキ  $0$  ハ空集合、 $1$  ハ全集合ニ相當スルモノデアル。此ノ如キ  $0$  或ハ  $1$  が唯一ツニ限ルコトハ定理3カラ明白。以下カ、 $0, 1$  が存在スル場合ヲ取扱フ。

[定理7] 凡テノ  $A = 0$  ツイテ

$$A \cdot 0 = 0, \quad A + 0 = A, \quad A \cdot 1 = A, \quad A + 1 = 1.$$

(註)  $0, 1$  ノ定義ト關係クノ定義カラ明白。

次ニ、任意ノ  $A$ ニ對シテ  $A + X = 1$  ナル如キ  $X$ 、又  $A \cdot Y = 0$  ナル如キ  $Y$  が存在スル、例ヘバ  $X = 1, Y = 0$  トスレバヨイ。ソコデ此ノ如キ  $X$  全体ノ積ヲ  $A'$  トシ、又此ノ如キ  $Y$  全体ノ和ヲ  $\bar{A}$  トスル。即チ

$$\begin{aligned} \text{(定義)} \quad A' &= \prod_i X_i && \text{但シ } A + X_i = 1 \\ \bar{A} &= \sum_j Y_j && \text{但シ } A \cdot Y_j = 0 \end{aligned}$$

然ラバ  $A', \bar{A}$  ハ次ノ性質ヲ有ツコトガ直ニ分ル。

[定理8]  $A + A' = 1$ . 又  $A + X = 1$  ナラバ  $X \supset A'$ .

$$A \cdot \bar{A} = 0. \quad \text{モシ } A \cdot Y = 0 \text{ ナラバ } Y \subset \bar{A}.$$

(定義)  $A' = \bar{A}$  トナルトキ、元  $A$ ヲ假ニ *normal* トイフコトニスル。

サウスレバ

[定理9]  $A$  が *normal* ナルタメニ必要ニシテ充分ナル條件

$$A + \widetilde{A} = I, \quad A \cdot \widetilde{A} = 0$$

ナル如キ  $\widetilde{A}$  ノ存在スルコトデアル。

(証) i. 必要ナルコト.  $A$  が *normal* トスレバ  $A' = \overline{A}$ . 依

ツテ、之レヲ  $\widetilde{A}$  トスレバ

定理8カラ

$$A + \widetilde{A} = I, \quad A \cdot \widetilde{A} = 0$$

ii. 充分ナルコト.  $A + \widetilde{A} = I, \quad A \cdot \widetilde{A} = 0$  ト假定スル。然  
ラバ  $A + \widetilde{A} = I$  ナル故、定理8ニ由リ  $\widetilde{A} > A'$ . 一方  $A + X_i = I$

ナル如キ  $X_i$  ヲ考ヘレバ  $(A + X_i) \widetilde{A} = \widetilde{A}$ .

然ルニ  $A \cdot \widetilde{A} = 0$  ナル故  $X_i \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A}$  故ニ  $\widetilde{A} < X_i$

従ツテ定理5カラ.  $\pi \widetilde{A} < \pi X_i = A'$  公理(IV)ニヨリ

$\pi \widetilde{A} = \widetilde{A}$  故ニ  $\widetilde{A} < A'$ . 之ト始メノ  $\widetilde{A} > A'$  トカラ  $\widetilde{A} = A'$ .

同様ニシテ  $\widetilde{A} = \overline{A}$  ナルコトモ分ルカラ  $A' = \overline{A}$  即チ  $A$

ハ *normal* デアル。(以上)

上記ノ証明ニ見ル通り  $\widetilde{A}$  がアルトスレバ  $\widetilde{A} = \overline{A} = A'$  トナ  
ルカラ、 $A + \widetilde{A} = I, \quad A \cdot \widetilde{A} = 0$  ナル如キ  $\widetilde{A}$  ハ唯一ツニ限ル  
コトが分ル。

(定義)  $A$  が *normal* ナルトキ、 $\widetilde{A}$  ヲ  $A$  ノ共軛元ト云フコト  
ニスル。

$\widetilde{\widetilde{A}}$  ハ集合論デ云ヘバ  $A$  ノ餘集合デアル。 $\widetilde{\widetilde{A}} = A$  ナルコト  
ハ明白。

[定理10]  $A$  ハ *normal* トスル。然ラバ凡テノ  $X$  ニツイテ

$A \cdot X = 0$  ト  $\widetilde{A} \cdot X = X$  トハ同シ意味デアル。

(証)  $A \cdot X = 0$  ト假定スレバ  $X = 1 \cdot X = (A + \widetilde{A})X = A \cdot X + \widetilde{A}X$   
 $= 0 + \widetilde{A} \cdot X = \widetilde{A} \cdot X$ .

又、 $\widetilde{A} \cdot X = X$  ト假定スレバ  $0 = 0 \cdot X = (A \cdot \widetilde{A})X = A \cdot (\widetilde{A} \cdot X)$   
 $= A \cdot X$

[定理 11]  $A$  が *normal* デ  $A < B$  ナラバ

$$A + X = B, \quad A \cdot X = 0$$

ナル如キ  $X$  が存在シ、且ツ唯一ツニ限ル。ソレハ  $X = \widetilde{A} \cdot B$  デアル。

(証)  $X = \widetilde{A} \cdot B$  トオク。然ラバ

$$A + X = A + \widetilde{A} \cdot B = (A + \widetilde{A}) \cdot (A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B = B (\because A < B)$$

$$A \cdot X = A \cdot (\widetilde{A} \cdot B) = (A \cdot \widetilde{A})B = 0 \cdot B = 0.$$

故ニ上記ノ如キ  $X$  ハ確カニ存在スル。逆ニ

$$A + X = B, \quad A \cdot X = 0 \quad \text{トスル。}$$

$$\text{然ラバ } (A + X) \cdot \widetilde{A} = B \cdot \widetilde{A} \quad \therefore A \cdot \widetilde{A} + X \cdot \widetilde{A} = B \cdot \widetilde{A}$$

$$A \cdot \widetilde{A} = 0 \text{ デアルカラ } X \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot B \quad \text{然ルニ方 } A \cdot X = 0$$

$$\text{ナル故定理 10 カラ、} \widetilde{A} \cdot X = X \quad \text{故ニ } X = \widetilde{A} \cdot B.$$

$\widetilde{A} \cdot B$  ハ相對概念ヲ用キタトキノ  $A$  ノ餘集合デアル。

最後ニ

[定理 12]  $A$  及ビ  $B$  が *normal* ナラバ  $A + B$ ,  $A \cdot B$  ハ *normal* デ

$$\widetilde{\widetilde{A + B}} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}, \quad \widetilde{\widetilde{A \cdot B}} = \widetilde{A} + \widetilde{B}.$$

$$(証) \quad (A + B) + \widetilde{\widetilde{A \cdot B}} = ((A + B) + \widetilde{A}) \cdot ((A + B) + \widetilde{B}) = (A + \widetilde{A} + B)(A + B + \widetilde{B})$$

$$= (I+B) \cdot (A+I) = I \cdot I = I.$$

$$\text{又 } (A+B) \cdot \widetilde{A} \widetilde{B} = (A \cdot \widetilde{A} \widetilde{B}) + (B \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}) = 0 \cdot \widetilde{B} + \widetilde{A} \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

故 = . 定理 9 カラ  $(A+B)$  ハ *normal* ナソレノ共軌元  
ハ  $\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$  デアル。  $\widetilde{A \cdot B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$  モ同様

以上デ大体基本的事実が導キ出サレタヤウニ思ハレル。

從ツテ 集合論ニ於ケル部分集合、相互ノ算法ハ集合ノ元ヲ用  
ヒズニ前記ノ公理群ノ上ニ組立テ得ルノデハナイカト思フ。